STRUCTURI MATEMATICE ȘI ROLUL ACESTORA ÎN SOLUȚIONAREA PROBLEMELOR PRACTICE

***Sergiu* CATARANCIUC**

Universitatea de Stat din Moldova

Trăsătura caracteristică a sec. XX – matematizarea activităților științifice și practice (în mod direct sau indirect). Într-o măsură mai mare sau mai mică, matematica este prezentă peste tot și, în principiu, posibilitățile de aplicare a ei și de matematizare a științelor nu sunt limitate.

Domenii de aplicare a matematicii: fizica; astronomia; informatica; biologia; chimia; economia; juridica; arheologia; științele sociale, etc.

Ce este matematica?

- Matematica este un mod de activitate intelectuală universală bazat pe studierea legilor naturii prin intermediul unor structuri abstracte și a relațiilor multi-are între elementele unor mulțimi.
- Matematica reflectă voința activă, rațiunea contemplativă și dorința de perfecțiune estetică. Elementele ei de bază sunt logica și intuiția, analiza și construcția, generalul și concretul.

"What is mathematics" (R.Courant & H.Robins)

- Natura formulează legile sale în limbajul matematicii.

Galileo Galilei

- Nici un mathematician nu este în stare să urmărească dezvoltarea matematicii în toată amploarea ei. Nu există nici un mathematician, poate cu excepția unor genii de talia lui H.Poincare sau D.Hilbert, care nu s-ar simți străin în unele domenii ale vastei lumi a matematicilor.

"L'Architecture des matematiques", 1948. N.Bourbaki

În această comunicare sunt prezentate un șir de rezultate ce țin de soluționarea problemelor de optimizare cu un caracter aplicativ pronunțat, obținute pe parcursul a mai multor ani de investigații științifice. Încercările de a soluționa probleme practice au contribuit în același timp și la obținerea unor rezultate remarcabile de ordin teoretic. Aceste rezultate au contribuit la fundamentarea și dezvoltarea unor direcții de cercetare importante din domeniul matematicilor, cum ar fi: teoria convexității, teoria grafurilor ți hipergrafurilor, topologia algebrică a relațiilor multi-are, teoria jocurilor, modelarea matematică, teoria deciziilor ș. a. Rezultatele teoretice obținute, precum și metodele de soluționare a problemelor de optimizare au fost descrise într-un șir de lucrări publicate în reviste de specialitate [1], [2], [5], [9], [13], [23], [29], [30], [37], precum și în monografii [7], [15], [18], [35]. De asemenea, rezultatele principale se predau în cadrul unor pachete opționale pentru studenți și sunt reflectate în manuale [27], [28], [36]. Periodic se fac comunicări la conferințe științifice [2], [3], [6], [14], [16],[21-23], [26], [37].

Problemele examinate în continuare pot fi grupate în mod firesc în trei grupe, în dependență de metodele teoretice de cercetare folosite precum și caracterul rezultatelor obținute.

A. Probleme extremale pe structuri discrete

I. Amplasarea medianei. În anii ’70, în cadrul Institutului de Matematică, se lucra asupra unui proiect prin care se căuta un model matematic de amplasare a Gării Auto Centrale a Republicii Moldova. Având deja, pe de o parte, graful căilor de circulație $G=(X,U)$, pentru care $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ reprezintă mulțimea punctelor de acumulare a pasagerilor, iar $U=\{ u_1, u_2,..., u_m\}$ – mulțimea porțiunilor de drum cu lungimile $l(u_1)$, $l(u_2)$, ..., $l(u_m)$ și, pe de altă parte, ponderile de pasageri $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$, calculate conform statisticilor, se cerea de aflat acel vârf x^* (*mediana* garfului G), care minimizează funcția:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} d(x,x_i)p(x_i), \qquad (1)$$

unde $d(x,x_i)$ este distanța dintre vârfurile grafului, calculată cu ajutorul $l(u_j)$, $j=1,2,...,m$. Mai târziu au apărut o serie de generalizări a acestei probleme care au fost cu succes soluționate [1], [2], [4], [8], [10], [11].

În scopul soluționării acestei probleme se descoperă o clasă de grafuri metrice şi se propune un algoritm eficient pentru aflarea medianei [1], [11], [18].

Această chestiune a condus la dezvoltarea a două direcții:

(a) introducerea noțiunii valoroase de *spațiu median* şi rezolvarea în acest spațiu a *problemei Weber* – o generalizare firească a lui (1). Pentru un caz particular de spaíu median se obțin rezultate surprinzătoare în legătură cu soluționarea problemei Weber [2].

(b) introducerea noțiunii de *convexitate metrică*. În cazul convexității pe grafuri au fost obținute rezultate importante, în particular, a fost soluționată problema convexității simple pentru clase importante de grafuri [7], [9], [12], [16], [24],[25], [31], [32].

II. d-Convexitatea. Este fundamentată şi considerabil dezvoltată o nouă direcţie de investigaţii a mulţimilor convexe într-un spaţiu metric care: permit a da un conţinut mai variat a rezultatelor din domeniu mulţimilor convexe a unui spaţiu linear, conduc la noi aplicaţii elucidând şi situaţia construcţiei unei Teorii Axiomatice a Convexităţii [38], [39].

Acest concept conduce la o nouă teorie – *d-convexitatea,* elaborată sub conducerea profesorului Petru Soltan în colaborare cu discipolii şi colegii săi. Importante sunt rezultatele legate de studierea proprietăților mulțimilor d-convexe în grafurile neorientate, și utilizarea acestora la soluționarea unor probleme aplicative, inclusiv problema centrului și problema medianei [9], [12], [13], [25], [30], [31].

Mai întâi au fost obţinute un şir de rezultate elementare, ceea ce e firesc (lucru menţionat de Kolmogorov, în spaţiul normat $\Re^n$, distanţa în care se introduce în mod standard: pentru $\forall$ x_1, $x_2 \in \Re^n$ se defineşte $d(x_1, x_2)=\|x_1-x_2\|$) [18], [38].

Au loc următoarele afirmaţii: (a) intersecţia oricărui ansamblu de mulţimi d-convexe din $\Re^n$ este d-convexă; (b) o mulţime $M \subset R^n$ este d-convexă dacă şi numai dacă pentru oricare x_1, $x_2 \in M$ fiecare curbă simplă $c(x_1, x_2)$ de lungimea $\|x_1-x_2\|$ aparţine lui M. O mulţime convexă din R^n e d-convexă, dacă şi numai dacă discul $\Sigma^n(0, 1) \subset R^n$ este *strict* convex, unde $\Sigma^n(0, 1)$ e discul lui $\Re^n$. Orice mulţime *d-convexă* e şi convexă. Astfel, noţiunea de mulţime d-convexă este *mai fină* decât cea convexă pentru spaţiu linear. *Anvelopa d-convex*ă a mulţimii $M \subset \Re^n$ se defineşte ca intersecţia tuturor mulţimilor d-convexe din $\Re^n$ ce conţin M, notată d-*conv*M. (c) Pentru o mulţime mărginită $M \subset \Re^n$ anvelopa d-convexă poate să nu fie mărginită.

III. Dimensiunea Helly în grafuri. O noţiune importantă ţine de dimensiunea lui Helly a lui $\Re^n$ introdusă de prima dată în raport cu mulţimile d-convexe ale spaţiului normat $\Re^n$. Fie h un număr natural, $1 \le h \le n$. Un spaţiu linear R^n poate fi astfel normat şi notat prin $\Re^n$, încât să posede proprietatea: orice familie finită de mulţimi d-convexe din $\Re^n$ are o intersecţie nevidă , dacă orice subfamilie din *h+1* elemente ale acesteia admit o intersecţie nevidă. Valoarea minimală a lui *h* e numită *dimensiunea Helly* a lui $\Re^n$, fiind notată prin *him* $\Re^n$. De unde rezultă că orice spaţiu $\Re^n$ îşi are dimensiunea Helly independentă de $dim\, \Re^n$.

Această situaţie se extinde şi asupra oricărui spaţiu metric, lucru care conduce şi la aplicaţii netriviale [38]:

(1) Pe un graf special G cu o metrică arbitrară şi cu *him*G=1, având vârfurile ponderate se află mediana. Este important că mediana nu depinde de metrica grafului şi mulțimea tuturor medianelor reprezintă o mulțime d-convexă [18]. Rezultatul respectiv se generalizează pe o clasă specială de structuri discrete care își au rădăcinile în complexul de relații multi-are [1], [6], [8], [14], [30], [40].

În ceea ce priveşte construcția de modele matematice, ce țin de mediană şi d-convexitate cu caracter pur practic au fost obținute rezultate fundamentale. Doar un exemplu elocvent, ce reprezintă un model de stocare a unui produs (a unui centru de producere) cu ofertă şi cerere aleatorie. Pentru ca centrul să activeze în mod continuu, este necesar ca acesta să-şi asigure o rezervă de materie. Managementul stocului necesită cheltuieli suplimentare, care influențează asupra cheltuielilor generale. Modelele pentru determinarea stocului optim, îşi au elementele principale: cererea de bunuri materiale, nivelul stocului, volumul de reaprovizionare, costuri de stocare, de lansare a comenzii etc. – în dependență de ofertă şi cerere. Iată un exemplar al acestora [41], [42].

Fie se stochează un singur produs şi cererea *r* pe intervalul de timp *T*, este o variabilă aleatoare discretă cu repartiția:

$$R:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & r & \dots \\ p(0) & p(1) & p(2) & \dots & p(r) & \dots \end{pmatrix},\quad p(r)\geq 0,\quad \sum_{r=0}^{\infty} p(r)=1.$$

Notăm prin *S* stocul la un moment dat (sau perioadă). Cererea *r* fiind aleatorie, avem două situații: $r \leq S$ şi $r > S$. Produsele rămase în cadrul excedentului de stoc se vând cu o pierdere c_1, iar în cazul lipsei de stoc se fac cheltuieli suplimentare evaluate prin c_2. La momentul dat c_1 şi c_2 sunt constante. Pentru un stoc al *finanțelor* apar două situații: (a) dacă cererea este mai mică decât fondul disponibil, atunci banca rămâne cu un fond imobilizat, care duce la o pierdere în valoare de c_1 unități convenționale; (b) dacă cererea este mai mare decât fondul disponibil, atunci banca nu e în stare să onoreze anumite cereri de creditare, ceea ce implică o pierdere de c_2 unități convenționale. În cadrul acestui model costul stocării este mic în comparație cu cheltuielile c_1 şi c_2 şi în consecință se neglijează, considerând că entitatea de aprovizionare nu depinde de timp. Vom optimiza valoarea medie a costului global. Dacă $r \leq S$, atunci se plăteşte c_1 unități pentru stocul suplimentar $S - r$, iar dacă $r > S$, se plăteşte c_2 unități pentru lipsa de stoc $r - S$. Astfel, costul excedentului de stoc C(S) la momentul dat este:

$$\begin{pmatrix} c_1 \cdot S & c_1 \cdot (S-1) & \dots & c_1 \cdot (S-r) & \dots & 0 & c_2 \cdot 1 & \dots & c_2 \cdot (r-S) & \dots \\ p(0) & p(1) & \dots & p(r) & \dots & p(S) & p(S+1) & \dots & p(r) & \dots \end{pmatrix},$$

a cărei valoare medie $M[C(S)] = c_1 \sum_{r=0}^{S} (S-r)\, p(r) + c_2 \sum_{r=S+1}^{\infty} (r-S)\, p(r)$ reprezintă cheltuielile medii totale ce țin de managementul stocului. Se caută $M[C(S^*)] = \min_S M[C(S)]$, unde S^* este valoarea lui S pentru care cheltuielile medii totale sunt minime. Funcția $M[C(S)]$ mai poate fi scrisă şi astfel:

$$M[C(S)] = \sum_{r=0}^{\infty} Q(r)\,|S-r|, \text{ unde } Q(r) = \begin{cases} c_1\, p(r), & \text{pentru } r \le S, \\ c_2\, p(r), & \text{pentru } r > S, \end{cases}$$

unde evident $M[C(S)]$ este o funcție convexă şi liniară pe porțiuni.

Dacă acest model este aplicat la graful G metric cu *him*G=1 şi vârfurile ponderate, atunci algoritmul de aflare a valorii $M[C(S^*)]$ nu *depinde* de metrică, şi mulțimea respectivă de vârfuri este o mulțime d-convexă.

(2) Pentru graful neorientat G=(X,U) este dată divizarea: $X=\bigcup_{i=1}^{k} X_i$, unde $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j=1,2,\dots,k$, încât subgrafurile *saturate* (ereditare) $G_1=(X_1,U_1),\dots,G_k(X_k,U_k)$ să admită nişte mediane aleatoare sau aproximative $f(x_1^0)$, $f(x_2^0)$,...,$f(x_k^0)$, încât suma $\sum_{i=1}^{k} f(x_i^0)$ să fie comparativă cu o valoare dată. Această problemă a fost rezolvată de dl D.Zambițchi şi aplicată pentru amplasarea entităților medicale, operă condusă şi realizată de regretatul profesor Nicolae Testemițeanu. Se cere menționat excelentul model de arbore neponderat şi cu lungimile de muchii, ce reprezintă nişte probabilități. Se cere a afla un astfel de vârf – *mediană multiplicativă*, care optimizează produsul produsului de probabilități de la vârful căutat până la celelalte vârfuri. Acest model extrem de important n-a fost apreciat la timp, însă el merită o atenție de exclusivitate: mediana menționată se află *fără a calcula probabilitățile*. Acest rezultat se reduce la o consecință, prin luarea logaritmului, a aflării medianei unui arbore cu ponderile vârfurilor egale cu 1.

(3) Se restabileşte, informația transmisă prin corteje de lungimea n cu ajutorul simboalelor 0 şi 1 prin repetarea de transmitere.

(4) La uzina de computere din Mensc a apărut problema de divizarea unei plăci poligonale, laturile căreia au două direcții perpendiculare, iar interiorul dispune de găuri cu dimensiunea k,

0≤k≤2. Se cerea ca această placă să fie divizată într-un număr minimal *p* de dreptunghiuri. Matematicienii din Belorusia, N.Kornienco, G.Matveev, N.Metelsky, R.Tyshkewicz au rezolvat cazul doar când placa nu are găuri. Dnii Petru Soltan şi Chiril Prisăcaru în 1981 au indicat o formulă a numărului *p* pentru cazul când placa respectivă reprezintă un poligon arbitrar mărginit, având găuri de orice dimensiuni, expunând şi un algoritm eficient pentru cazul iniţial cu găuri. În 1984 dl Valeriu Soltan generalizează acest rezultat pentru un set finit de plăci, tradusă în engleză (SUA). Însă placa în cauză, la practica de formare a pieselor electronice, cerea şi divizări speciale, chestuini ce au fost rezolvate definitiv.

Aceste rezultate se obţin prin metode topologice şi teoria d-convexităţii. Rezultatele respective dau răspuns la unele chestiuni din tehnologia producerii de piese electronice pentru computere.

În locul planului $\Re^2$ se poate lua un spaţiu $\Re^n$ şi un poliedru geometric deschis P^n cu diferite găuri ale acestuia, oricare i-ar fi definiţia. Se cere doar ca orice faţetă cu *n-1* dimensiuni a lui P^n să aparţină unui hiperplan d-convex. Se formulează aceeaşi problemă de divizare optimală. Este ingenioasă formula ce reprezintă numărul minim de părţi d-convexe în care se divizează P^n:

$$q(\mathrm{P}^n) = m + (-1)^n(\chi(\mathrm{P}^n) - \chi(bd\mathrm{P}^n) - h), \tag{2}$$

unde m este numărul total al muchiilor (n-1)-dimensionale local *non-d-convexe*, χ - caracteristica lui Euler, iar h – caracteristica lui Euler a unui complex celular ce divizează P^n [43], [44]. Formula (2) a fost dedusă aplicând teoria grupurilor omologice, care reduce problema la caracteristica lui Euler. Cazul $\Re^3_1$ este direct legat cu probleme practice, în special cu problema containerizării pentru norma $\|x\| = |x^1| + |x^2| + |x^3|$ [44]. Această direcţie de cercetări conduce la extinderi imense, în special la împachetarea pieselor electronice cu dimensiuni egale.

IV. Relaţii multi-are şi aplicaţii. În ultimii ani se deschide o direcţie originală în matematici – *topologia relaţiilor n-are*, obţinând noi generalizări în topologia algebrică abstractă, adică, fără a utiliza spaţiile topologice, şi completează astfel substanţial şi domeniul grafurilor cu multitudinea acestora de aplicare practică. Această structură matematică nouă conduce la un şir de aplicaţii nontriviale importante [1], [5], [15], [17], [20], [23], [49].

Pe cale pur discretă se construieşte un *complex de ralaţii multi-are* K^n, care în alt limbaj reprezintă o generalizare destul de firească a grafurilor orientate. Pentru acest complex de relaţii se construiesc grupurile de *omologii* directe şi cele de *coomologii* peste un grup aditiv, de exemplu, peste grupul numerelor întregi Z sau peste grupul Zp al claselor de resturi, unde $p \in Z$ este prim. Se generalizează un şir de teoreme clasice, care determină trunchiul noii structuri. Însă se obține şi un rezultat absolut neaşteptat cu repercusiuni de aplicare nebănită.

Se introduce noțiunea de izomorfism al acestor complexe şi, mai întâi, pentru cazul particular, când un complex de relații este un complex simplicial abstract, se verifică acest rezultat aplicând autoizomorfismele, adică se deduce formula pentru existența simplexelor fixe, chestiune care a trezit un substanțial interes. Este foarte ingenioasă ideea de a ilustra pe "tablă", pe plan aceste elemente fixe. Formula indicată se deduce prin omologiile *diluate* ale complexului dat . Lucrarea în cauză a permis să se formuleze un şir de generalizări din teoria garfurilor, precum ar fi noțiunea de contur *mixto-multidimensional*; de *coerență a două simplexe* S^p şi S^q *incidente*, cu dimensiuni cuprinse între 0 şi p-q, p>q, şi independența acestei coerențe de ordinea vârfurilor pentru S^p şi S^q; de mulțimi de simplexe *intern* şi *extern stabile* ale lui K^n, de *nucleu* al lui K^n, de *funcția Grundy* definită pe K^n, de *joc ai doi parteneri* pe complexul K^n, strategiile cărora depind de nucleul format în baza funcției Grundy. Aceste generalizări de noțiuni au permis a demonstra generalizările respective de teoreme din teoria garfurilor cu aspect preponderent practic şi pentru a obține o viziune mai largă asupra problemelor ce țin de viața cotidiană [29]. A fost fundamentată teoria grupurilor de omologii şi coomologii peste grupul Z_2 pentru *hipergrafi* [37]. Realizarea acestei teorii a fost extrem de firească, completă, dar dificilă, ceea ce a condus la acoperirea substanțială a cunoscutului rezultat clasic obținut de Dodson, C.T.I.; Lok R., „Hipergraphs, homotopy and neighbourhood homology", I.Ars Comb. 16-A, pp.107-130.

B. Elaborarea metodelor numerice de soluționare a jocurilor și a problemelor de programare dinamică stocastică

Pe un complex de relații multi-are a fost studiată problema determinării strategiilor optime pentru un joc cu doi jucători. Studiul se face prin construirea unei funcții speciale – funcția Grundy. Comportamentul jucătorilor este determinat de capacitatea acestora de a depista prin intermediul funcției Grundy a unor mulțimi speciale de vârfuri [17], [19], [21], [29].

Problemele de programare dinamică stocastică reprezintă o extindere a problemelor clasice de control optimal discret precum și a proceselor decizionale Markov cu criterii de optimizare a costului mediu total cu discont. Pentru soluționarea unor astfel de probleme s-a aplicat concepția teoriei jocurilor, au fost studiate noi clase de jocuri poziționale stocastice ca generalizare a jocurilor poziționale deterministe [45-48].

Se consideră sisteme dinamice discrete, dinamica cărora este dirijată de mai multe persoane (jucători), unde fiecare jucător posedă de parametrii proprii de control și de funcția proprie scop ce intenționează s-o optimizeze în procesul de dirijare pe un interval finit sau infinit de timp. Aparatul matematic ce se folosește la formularea, cercetarea și soluționarea problemelor menționate este bazat pe concepția teoriei jocurilor cooperatiste și necooperatiste, metodologiei moderne a complexității de calcul a problemelor combinatorice și teoriei clasice de control optimal discret.

Aparatul matematic elaborat pentru cercetarea și soluționarea problemelor multicriteriale dinamice discrete a permis de a elabora algoritmi cu estimații polinomiale de aflare a strategiilor optime pentru cazurile problemelor multicriteriale. Mai mult ca atât, elaborările în acest domeniu au permis de a cerceta și soluționa jocurile dinamice în forma pozițională și în special a jocurilor ciclice. În baza rezultatelor obținute s-a demonstrat existența algoritmilor cu estimații polinomiale pentru aflarea strategiei optime a jucătorilor în jocurile ciclice antagoniste – (problema care a fost formulată de Mîsețchi, Zwick în 1978).

Problema controlului optimal cu un singur criteriu. Fie dat sistemul dinamic *L* cu mulțimea finită de stări *X*, unde la fiecare moment de timp $t = 0, 1, 2, \ldots$ starea sistemului *L* este $x(t) \in X$. În *X* sunt fixate două stări x_0 și x_f, unde $x_0 = x(0)$ reprezintă starea inițială a sistemului *L*, iar x_f este starea în care sistemul *L* trebuie să fie transferat și starea finală trebuie să fie atinsă la momentul de timp $T(x_f)$, astfel ca $T_1 \leq T(x_f) \leq T_2$, unde T_1 și T_2 sunt cunoscute. Dinamica sistemului *L* este definită cu ajutorul unui sistem de ecuații în diferențe finite

$$x(t+1) = g_t(x(t), u(t)), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

unde

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

iar $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \in R^m$ $\mathrm{R_m}$ reprezintă vectorul parametrilor de control. Pentru fiecare moment de timp *t* și pentru fiecare stare *x(t)* este dată mulțimea admisibilă $U_t(x(t))$ a vectorului parametrilor de control *u(t),* deci

$$u(t) \in U_t(x(t)), \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

În sistemul (1) se consideră că *x(t + 1)* se determină în mod unic, dacă este cunoscută starea *x(t)* și vectorul parametrilor de control *u(t).* Se consideră de asemenea că la fiecare moment de timp *t* este definit costul $c_t(x(t), x(t+1)) = c_t(x(t), g_t(x(t), u(t)))$ de trecere a sistemului *L* din starea *x(t)* în starea *x(t* + 1*)* la etapa de timp [*t; t* + 1].

Fie $x_0 = x(0), x(1), x(2), ..., x(t), ...$ o traiectorie, generată de vectorii parametrilor de control $u(0), u(1), ..., u(t-1), ...$

Atunci costul integral în timp $F_{x_0 x_f}(u(t))$ de trecere a sistemului dinamic *L* din starea $x_0 = x(0)$ în starea x_f se definește în felul următor:

$$F_{x_0 x_f}(u(t)) = \sum_{t=0}^{T(x_f)-1} c_t(x(t), g_t(x(t), u(t))) \qquad (4)$$

dacă $T_1 \leq T(x_f) \leq T_2$; în caz contrar

$$F_{x_0 x_f}(u(t)) = \infty.$$

Problema. *Se cere de aflat vectorii parametrilor de control* $u(0), u(1), u(2), ..., u(t), ...$ *ce satisfac condiția (3) și minimizează funcționalul (4).*

Pentru aflarea soluției optime a acestei probleme a fost elaborat algoritmul bazat pe metoda programării dinamice și s-a analizat complexitatea de calcul. De asemenea, această problemă a fost generalizată pentru cazuri multicriteriale.

C. Modelarea matematică a proceselor fizice în energetică

Procesele fizice ce apar în energetică pot fi studiate cu ajutorul unor modele matematice prin aplicarea instrumentarului matematic respectiv. Aici au fost obținute rezultate impunătoare expuse în lucrările [33], [34], [35]. Cercetările sunt axate în jurul soluționării a 3 tipuri de probleme:

I. Problema de transmitere la distanțe mari a energiei electrice prin liniile de înaltă tensiune. Problema se modelează cu ajutorul ecuațiilor "telegrafistelor" – sistem de ecuații diferențiale de tip hiperbolic cu derivate parțiale de ordin I. În calitate de necunoscute se folosesc funcțiile de curent și tensiune.

Soluția modelului **"ECUAȚIILE TELEGRAFISTELOR"** se obține prin aplicarea unor metode analitice exacte: descompunerile în serii Fourier; reducerea problemelor la ecuații diferențiale obișnuite prin aplicarea transformărilor integrale Fourier.

Rezultate obținute:

a) s-a demonstrat că există așa regim de lucru a liniei de tensiune înaltă, pentru care soluția are formă non-sinusoidală, cu toate că tensiunea la intrare este sinusoidală.

b) a fost rezolvată problema pentru cazul liniilor neomogene de înaltă tensiune prin utilizarea metodelor numerice bazate pe metoda diferențelor finite.

II. Studierea proceselor staționare legate de examinarea câmpurilor electromagnetice [33], [35]. În acest caz modelul matematic reprezintă problema Dirichlet sau Neumann pentru ecuațiile Poisson sau Laplace. Ecuațiile respective sunt ecuații diferențiale cu derivate parțiale de tip eliptic de gradul II. Soluționarea problemei se face în baza metodei volumelor finite.

Rezultate obținute:

a) elaborarea algoritmilor de generare a rețelelor discrete și a schemelor în diferențe.

b) au fost obținute soluții ale problemelor ce țin de examinarea câmpului de tensiune în cazul (высоковольтного делителя напряжений).

Algoritmii obținuți pot fi folosiți pentru soluționarea unui spectru larg de probleme, în care procesele fizice se modelează cu ajutorul ecuațiilor diferențiale de tip eliptic.

III. Modelarea matematică a proceselor fizice în dispozitivele semiconductoare electronice [35]. În acest caz modelul matematic reprezintă un sistem de ecuații diferențiale neliniare, în care funcțiile necunoscute figurează ca variabile în locul coeficienților sistemului și a părții drepte a acestuia. Situația se complică datorită faptului că parametrii fizici ai problemei variază în limite foarte mari (de la 10-19 până 1021). De asemenea, coeficienții problemei depind în mod exponențial de funcțiile necunoscute, ceea ce conduce la o acumulare rapidă a erorilor de calcul.

Metode de soluționare:

a) metode numerice bazate pe metoda volumelor finite pentru aproximarea ecuațiilor diferențiale;

b) metode de liniarizare a sistemelor neliniare a ecuațiilor algebrice.

Rezultate obținute:

a) a fost soluționată problema de calcul a câmpului de potențiale și a câmpului de concentrare a electronilor într-o diodă, conectat la o sursă externă de tensiune;

b) metodele respective au fost realizate sub forma unor programe de calcul.

Bibliografie.

1) Cataranciuc S., Soltan P. *Complex of abstact cubes and median problem,* Computer Science Journal of Moldova. Vol.19, nr.1(55) 2011, p. 38-63.
2) Cataranciuc S. *Задача Вебера для n-мерного кубического комплекса со взвешенными вершинами*, Proceedings of the International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies. Minsk, October'31 – November'3, 2011, v 2, p. 288 - 291.
3) Cataranciuc S. *The complex of parallelepipeds and the 3-dimensional tree*, The 33-rd Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA), June 02-07, 2009. Proceedings, vol. II, p.293-296.
4) Cataranciuc S. *Transversale intr-un complex de cuburi abstracte*, Studia Universitatis. Seria: Ştiințe exacte şi economice. N 2(42), 2011, p. 34-43.
5) Cataranciuc S. *The cubical abstract tree and its median*, Mathematical modelling of invironmental and life sciences problems. Editura Academiei Romane, Bucuresti, 2010, p.157-166.
6) Cataranciuc S.; Scripnic M.; Soltan P. *About the median that does not depend on the space metric*, The 30-th Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA). Proceedings. Chişinău, July 5-10, 2005, p. 58-61.
7) Cataranciuc S.; Sur N. *Grafuri d-convex simple şi quasi-simple*, Monografie, Chişinău: CEP USM, 2013, 208 p.
8) Cataranciuc S.; Soltan P. *The median of the n-dimensioanal abstract tree*, Annals of the Tiberiu Popoviciu seminar of functional equations, approximations and convexity. Vol. 7, 2009, Cluj-Napoca, Romania, p. 33-46.
9) Cataranciuc S. *Классы d- выпукло простых графов*, Исследования по прикл. матем. и информ. 1990, Кишинев, Штиинца, с. 97-102.
10) Cataranciuc S. S*pecial metrics of the abstract cubic complex*, Studia Universitatis. Seria "Ştiințe exacte şi economice". Nr.3 (13), 2008, Chişinău, p. 39 – 43.
11) Cataranciuc S. *An algorithm for determination of the median independent on the metric of the space*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, vol.4, 2006, Cluj-Napoca. p. 13-22.
12) Cataranciuc S. Вершинная разборка d- выпукло квазипростых планарных графов, Деп. МолдНИИНТИ, N 2020, 1988, Кишинев, 20с.

13) Cataranciuc S.; Ch. Prisăcaru *Cercetări în domeniul topologiei combinatorice, mulțimilor convexe, teoriei grafurilor, hipergrafurilor şi aplicațiilor acestora*, Elemente de istorie a matematicii şi matematica în Republica Moldova. Chişinău – 2006, p. 327-345.
14) Cataranciuc S. *Location problems into complexes of cubes with weighted vertexes*, The 20th conference on applied and industrial mathematics (dedicated to academician M. Ciobanu), Ghișinău, august 22-25, 2012, pp. 61-62.
15) Bulat M.; Cataranciuc S. ; Zgureanu A. *Mulțimi de relații multi-are și criptarea informației*, Monografie, Chişinău: CEP USM, 2013, 208 p.
16) Cataranciuc S. *Convexitatea simplă a grafurilor orientate*, Conferința Internațională "Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaționale. Ediția III". Chişinău, 19-23 martie, 2012, p. 9-19.
17) Cataranciuc S. *Coloring of the Simplicial Complex and the Grundy Function*, The 14-th International Conference of Scientific Papers "Scientific Research and Education in the Air Force". PROCEEDINGS. Braşov (Romania), May 24-26, 2012, p. 515-519.
18) Soltan P. S.; Zambițchi D. K.; Prisăcaru Ch. F. *Extremal problems on graphs and algorithms of their solving*, Kishinev, 1974, (in Russian).
19) Cataranciuc S. *Optimal strategy in a simple game on a simplicial complex*, The 13th International Conference on Mathematics and its Applications - ICMA 2012, Abstracts, November 1-3, 2012, "Politehnica" University of Timişoara, p.17
20) Cataranciuc S.; Bulat M.; Ciobanu Ia.; Zgureanu A. *Криптосистемы на базе ряда Тейлора для булевых функций*, Conferința Internațională "Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaționale. Ediția III". Chişinău, 19-23 martie, 2012, p. 229-251.
21) Cataranciuc S. *Homogeneous complex of n-dimensional abstract cubes and Grundy function*, Mathematics & Information Technologies: Research and Education, International Conference MITRE-2011, Chişinău, 2011, august 22-25, p. 28-29.
22) Bulat M.; Cataranciuc S.; *A method for calculating the Zhegalkin polynomial coefficients*, Mathematics & Information Technologies: Research and Education, International Conference MITRE-2011, Chişinău, August 22-25, 2011, p. 19-20.
23) Cataranciuc S. *Encryption Systems Based on Multidimensional Matrixes*, Annals of the Tiberiu Popoviciu seminar of functional equations, approximations and convexity. Vol. 8, 2010, Cluj-Napoca, Romania, p.3-14

24) Cataranciuc S.; Sur N. *About directed d-convex simple graphs*, Computer Science Journal of Moldova., vol.16, nr. 3(48), Chişinău, 2008, p. 323-346.

25) Cataranciuc S.; Vicol N. *Involving d-convex simple and quasi-simple planar graphs in* R^3, Computer Science Journal of Moldova., vol.13, nr. 2(38), Chişinău, 2005, p. 151-167.

26) Cataranciuc S. *Jocuri simple pe un complex de relații multiare*, Lucrările sem. „Tiberiu Popoviciu" de Ec. Dif., Aprox. şi Convexitate. Cluj-Napoca, 2002, p.47-49.

27) Cataranciuc S.; Niculiță A. *Aspecte algoritmice ale teoriei grafurilor. Partea I*, CEP USM, Chișinău, 2006, 142 p.

28) Cataranciuc S.; Niculiță A.; Novac L. *Aspecte algoritmice ale teoriei grafurilor. Partea I*, CEP USM, Chișinău, 2012, 174 p.

29) Cataranciuc S.; Soltan P. *A simple games of a complex of multiary relations*, Analele facultății de Matematică şi Informatică, Vol. 3, nr.1 (1), 2001, Chişinău, p.59-76.

30) Cataranciuc S.; Cepoi V.; Gherman L.; Soltan P. *Convexitatea generalizată şi aplicațiile ei*, Lucr. conf. pregătitoare p-u Congr. mat-lor români, 1992, Bucureşti, p.145-154.

31) Cataranciuc S. *d- выпуклые множества графов*, Исследования по прикл. матем. и информ. 1990, Кишинев, Штиинца, с. 102-108.

32) Cataranciuc S.; Soltan V. *d- выпукло простые и d-выпукло квазипростые планарные графы*, Деп. в МолдНИИНТИ, N 2022, 1988, Кишинев, 23с.

33) Berzan V.; Patsiuk V.; Rybakova G.; Postolache P. *Modeling of dynamic processes nonhomogeneous circuits with distributed and lumped parameters*. Buletinul AGIR nr. 3/2012, iunie-august, București, 2012. p. 141-149.

34) Pațiuk V., Rîbacova G. *The solution of the cable equations by means of finite difference time domain method.* Problemele energeticii regionale. Revistă ştiințifică, informațional-analitică şi inginerească. Nr. 1(12), 2010, Institutul de Energetică A.Ş.M., Chişinău, 2010. p. 16-24.

35) Patsiuk V. *Mathematical methods for electrical circuits and fields calculation*. Chişinău, Centrul Editorial-Poligrafic al USM, 2009, 442 p.

36) Cataranciuc S.; Căpățână Gh.; Maximilian S. *Matematici aplicate în economie*, Manual, Chişinău: CEP USM, 2013, 388 p.

37) Cataranciuc S.; Soltan P. *Hypergraphs and their homology*, Trends in the Development of the Information and Communication Technology in Education and Management, International Conference, March 20-21, 2003, Chișinău, p. 294-300 (in Romanian).

38) Boltyansky V.; Soltan P. *Combinatorial geometry of the various classes of convex sets*, Știința, Kishinev, 1978, 280 p. (in Russian).

39) Soltan V. *Introduction to the axiomatic theory of convexity*, Știința, Kishinev, 1984, 224 p. (in Russian).

40) Cataranciuc S.; Soltan P. *Abstract complexes, their homologies and applications*, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. 2010, 2(63), pp.31-58.

41) Замбицкий Д. К.; Лозовану Д. Д. *Алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях.* Кишинев, Штиинца, 1983, 115 стр.

42) Замбицкий Д. К. *Задача Вебера на дереве с вероятностными весами вершин.* Математическое моделирование и оптимизация, вып.110, Кишинев, Штиинца, 1998, стр.24-32.

43) Prisacaru Ch.; Soltan P. *Divizarea unui poliedru multidimensional în părți convexe.* Seminarul Itinerat „Tiberiu Popoviciu”, Cluj-Napoca, 2000, p.65-67.

44) Băț I.; P.Soltan P. *On the division of special 3-dimensional polihedrons into d-convex parts and its applications.* Seminarul Itinerat „Tiberiu Popoviciu”, Cluj-Napoca, 2000, p.59-61.

45) Lozan V.; Ungureanu V. *The Set of Pareto-Nash Equilibria in Multicriteria Strategic Games*, Computer Science Journal of Moldova, vol. 20, no.1(58), 2012, p. 3-14.

46) Ungureanu V. *Nash Equilibrium Conditions—Extensions of Some Classical Theorems*, Conference de le SMAI sur l’optimization et la D,ecision, Paris, 18-20 avril, 2007.

47) Lozovanu D.; Pickl S. *Optimization and Multiobjective Control of Time-Discrete Systems*, Springer, 2009, 300p.

48) Lozovanu D. *The game-theoretical approach to Markov decision problems and determining Nash equilibria for stochastic positional games*, Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimization, 2(2), 2011, p. 162-164.

49) Cataranciuc S. *Transversale intr-un complex de cuburi abstracte*, Studia Universitatis. Seria: Ştiințe exacte şi economice, N 2(42), 2011, p. 34-43.